

# UNIVERSITÉ DE NICE

U.A. du C.N.R.S. n°168 - Jean-Alexandre Dieudonné

*Mathématiques*

**Extension du Théorème de Brown- Douglas-Fillmore  
au cas des opérateurs non bornés**

Jean-Philippe Labrousse - Brigitte Mercier

**Prépublication n°243**

Juin 1989

Atelier Reprographie - Maths

Adresse : Parc Valrose - F-06034 NICE CEDEX - Tél 93. 52 98 98

# EXTENSION DU THEOREME DE BROWN-DOUGLAS-FILLMORE AU CAS DES OPERATEURS NON BORNES

Jean-Philippe Labrousse , Brigitte Mercier

## § 0 . Introduction

En 1973 L. Brown , R.G. Douglas et P.A. Fillmore ont démontré dans [ 1 ] un résultat sur la caractérisation de certaines classes d'équivalence d'opérateurs par leur tableau spectral . Ce travail est destiné à étendre ce résultat aux opérateurs non bornés , extension déjà partiellement réalisée dans [ 7 ] . Il nous a paru intéressant , en outre , d'établir quelques propriétés des opérateurs essentiellement normaux non bornés , même si elles ne sont pas pertinentes pour la démonstration du résultat principal .

## Notations et rappels de résultats

Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe et soit  $A$  un opérateur linéaire défini dans  $H$  et à valeurs dans  $H$  . On notera  $D(A)$  son domaine ,  $N(A)$  son noyau et  $R(A)$  son image . On notera :

$G(A) = \{ u , Au \mid u \in D(A) \} \subset H \times H$  , le graphe de  $A$  et on dira que  $A$  est fermé si  $G(A)$  est fermé . Si  $A$  est fermé et  $D(A)$  est dense dans  $H$  alors il existe un opérateur fermé à domaine dense  $A^*$  défini dans  $H$  et à valeurs dans  $H$  , l'adjoint de  $A$  . Alors ( cf. [ 8 ] , §118 ) l'opérateur  $I + A^*A$  défini dans  $H$  et à valeurs dans  $H$  est fermé , surjectif et a un domaine dense dans  $H$  ; si on pose

$$R_A = (I + A^*A)^{-1} , \quad \text{on trouve :} \quad (AR_A)^* = A^*R_A^*$$

$$\text{d'ou} \quad \forall u \in H , \quad \| 2AR_A u \|^2 + \| (2R_A - I)u \|^2 = \| u \|^2 \quad (0.1)$$

De ( 0.1 ) on déduit immédiatement que :

$$\|AR_A\| \leq 1/2 \quad ; \quad \|R_A\| \leq 1 \quad (0.2)$$

La projection orthogonale sur  $G(A)$  dans  $H \times H$  est donnée par :

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^*R_A^* \\ AR_A & I - R_A^* \end{pmatrix} \quad (0.3)$$

( cf [ 9 ], [ 2 ] )

On notera  $C(H)$  l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense  $H$  et à valeurs dans  $H$ , muni de la métrique  $g$  définie par :

$$\forall A, B \in H, \quad g(A, B) = \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\| \quad (0.4)$$

Cette métrique induit la topologie uniforme habituelle sur  $L(H)$ , le sous ensemble des éléments bornés de  $C(H)$  ( cf. [ 2 ] et la bibliographie qui y est citée ). Posons encore :

$$S_A = (I + A^*A)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Alors :} \quad (AS_A)^* = A^*S_A^*$$

$$\text{et} \quad \forall u \in H, \quad \|AS_A u\|^2 + \|S_A u\|^2 = \|u\|^2 \quad (0.5)$$

### Remarque 0.1

L'identité  $(AS_A)^* = A^*S_A^*$  entraîne que si  $u \in D(A^*)$ ,

$$A^*S_A^*u = S_A A^*u$$

$$\text{et} \quad (I + S_A)^{-1}A^*u = A^*(I + S_A^*)^{-1}u \quad (0.6)$$

Soit  $A \in C(H)$ . Posons  $c(A) = \inf \frac{\|Au\|}{\|u\|}$  où l'inf est pris sur tous les  $u \in D(A) \cap N(A)^\perp$ .  $c(A)$  est appelée la conorme de  $A$  et  $R(A)$  est fermé si et seulement si  $c(A) > 0$ .

Si  $A \in C(H)$  avec  $R(A)$  fermé et  $\max \{ \dim N(A), \dim N(A^*) \} < \infty$  on dira que  $A$  est Fredholm ( noté  $A \in F(H)$  ). Si  $A \in C(H)$  avec  $R(A)$  fermé et  $\min \{ \dim N(A), \dim N(A^*) \} < \infty$ , on dira que

$A$  est semi-Fredholm ( noté  $A \in SF(H)$  ). Evidemment  $F(H) \subset SF(H)$

et si  $A \in SF(H)$ ,  $\text{Ind}(A) = \dim N(A) - \dim N(A^*)$  est appelé l'indice

de  $A$ . Si  $A \in C(H)$  avec  $R(A)$  fermé et si  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a

$N(A^n) \subset R(A)$  on dira que  $A$  est régulier ( cf. [ 5 ], Déf. 4.1.1 et Prop.

4.1.1 ). On posera :  $\text{Reg}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ est régulier} \}$ .

Si  $A, B \in C(H)$  on dira que  $A$  est faiblement compact-équivalent à

$B$  ( et on notera  $A \sim_K B$  ) si  $P_{G(A)} - P_{G(B)}$  est un opérateur compact

de  $H \times H$  dans lui-même . Dans ce cas on peut montrer que l'opérateur

$I + A^*B \in F(H)$  et on dira que  $A$  est fortement

compact-équivalent à  $B$  ( et on notera  $A \approx_K B$  ) si  $A \sim_K B$  et si

$\text{Ind}(I + A^*B) = 0$ .

( pour toutes ces définitions voir [ 6 ] ) . Enfin on écrira :

$$\rho_{\theta}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \in F(H) \}$$

$\rho_{\theta}(A)$  est appelé le résolvent essentiel de  $A$ .

**Proposition 0.2** ( voir , par exemple , [ 3 ] )

Soit  $A \in L(H)$  avec  $R(A)$  fermé . Alors il existe un unique  $B_v \in L(H)$

tel que :  $ABA = A$  ;  $BAB = B$

$AB = (B^*A^*)^*$  est la projection orthogonale sur  $R(A)$

$BA = (A^*B^*)^*$  et  $I - BA$  est la projection orthogonale sur  $N(A)$

$B$  est appelé l' inverse de Moore-Penrose de  $A$

**Remarque 0.3**

$R(B)$  est fermé et si  $B$  est l'inverse de Moore-Penrose de  $A$  alors  $A$  est l'inverse de Moore-Penrose de  $B$  . Enfin si  $A$  est inversible , alors  $A^{-1}$  est l'inverse de Moore-Penrose de  $A$  .

Nous incluons ici une proposition dont la teneur est bien connue mais dont la démonstration est difficile à trouver dans la littérature . Nous

avons besoin tout d'abord d'un lemme :

#### Lemme 0.4

Soit  $C \in L(H)$ , symétrique tel que  $0 \leq C \leq 1$ . Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|C(I - C)^n\| < 1/(2n) \quad (0.7)$$

**Démonstration**

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (I - C + C)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} C^j (I - C)^{2k-j}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (I - C - C)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (-1)^j C^j (I - C)^{2k-j}$$

$$\text{Donc } I \geq I - (I - 2C)^{2k} \geq 4k C(I - C)^{2k-1}$$

$$\text{ou encore : } \forall u \in H, \quad (C(I - C)^{2k-1}u, u) \leq \|u\|^2/(4k)$$

$$\text{et : } \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|C(I - C)^{2k-1}\| < 1/(4k-2) \quad (0.8)$$

$$\text{En outre : } |(C(I - C)^{2k}u, u)|^2 = |(C(I - C)^{2k-1}(I - C)u, u)|^2$$

et en utilisant l'inégalité de Schwarz généralisée (cf. [8] § 104) on

$$\begin{aligned} \text{trouve } |(C(I - C)^{2k}u, u)|^2 &\leq (C(I - C)^{2k-1}u, u) (C(I - C)^{2k+1}u, u) \\ &\leq 1/[(4k)(4k+4)] \|u\|^4 < 1/(4k)^2 \|u\|^4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|C(I - C)^{2k}\| < 1/(4k) \quad (0.9)$$

et le lemme se déduit de (0.8) et de (0.9).

#### Proposition 0.5

Soit  $A \in L(H)$  un opérateur symétrique positif tel que  $\|A\| \leq 1$ .

Alors il existe une suite de polynomes  $\{p_n(A)\}$  satisfaisant les

conditions

suivantes :

$$1) \quad p_n(A) \text{ est de degré } 2^{n-1}$$

$$2) \quad p_n(0) = 0$$

Si  $B \in L(H)$  est l'unique opérateur symétrique positif tel que  $B^2 = A$

$$3) \quad 0 \leq p_n(A) \leq B \leq I$$

$$4) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|B - p_n(A)\| < 1/n$$

### Démonstration

Posons :  $p_1(A) = A/2$

$$p_{n+1}(A) = p_n(A) + [A - p_n^2(A)]/2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (0.10)$$

1) et 2) se démontrent aisément par induction sur  $n$ . Pour démontrer 3)

observons que :  $0 \leq p_1(A) = A/2 \leq B \leq I$

et  $B - p_1(A) = B(I - B/2) \geq 0$ .

Supposons 3) démontré pour  $n$  ; alors :

$$B - p_{n+1}(A) = B - p_n(A) - [B^2 - p_n^2(A)]/2$$

$$\text{Donc :} \quad B - p_{n+1}(A) = [B - p_n(A)] [I - (B + p_n(A))/2] \quad (0.11)$$

Comme  $B - p_n(A)$  et  $I - (B + p_n(A))/2$  sont tous deux positifs ( par hypothèse d'induction ) et commutent entre eux ( ils sont tous deux des polynômes en  $B$  ) leur produit est également positif .

Donc  $p_{n+1}(A) \leq B \leq I$ .

Mais alors d'après ( 0.10 ) et l'hypothèse d'induction ,  $p_{n+1}(A)$  est la somme de deux opérateurs positifs et par conséquent positif lui même , ce qui démontre 3) .

$$\text{Finalement } I - (B + p_n(A))/2 = I - B/2 - p_n(A)/2 \leq I - B/2$$

Donc de ( 0.11 ) on déduit que :

$$B - p_{n+1}(A) \leq [B - p_n(A)] (I - B/2)$$

et par induction que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B - p_n(A) \leq [B - p_1(A)] (I - B/2)^{n-1}$

d'où :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|B - p_n(A)\| \leq \|B(I - B/2)^n\| \leq 2 \|(B/2)(I - B/2)^n\|$

et 4) se déduit du lemme 0.2 en prenant  $C = B/2$ .

## § 1 . Bissecteurs

### Définition 1.1

Soit  $A \in C(H)$  . Posons :  $\tilde{A} = AS_A(I + S_A)^{-1}$

Pour des raisons que nous exposerons ci-dessous nous appellerons  $\tilde{A}$  le bissecteur de  $A$  . Cette notion a été introduite dans [ 4 ] .

### Proposition 1.2

Soit  $A \in C(H)$  . Alors :

- (1)  $\|\tilde{A}\| \leq 1$
- (2)  $(\tilde{A})^* = \tilde{A}^*$
- (3)  $R_{\tilde{A}} = (I + S_A)/2$
- (4)  $\tilde{A}R_{\tilde{A}} = AS_A/2$

### **Démonstration**

- (1)  $\|\tilde{A}\| \leq \|AS_A\| \|(I + S_A)^{-1}\| \leq 1$
  - (2)  $(\tilde{A})^* = (I + S_A)^{-1}A^*S_A^* = A^*S_A^*(I + S_A^*)^{-1} = \tilde{A}^*$ , en utilisant ( 0 . 6 )
  - (3)  $I + \tilde{A}^*\tilde{A} = I + (I + S_A)^{-1}A^*S_A^*AS_A(I + S_A)^{-1} =$   
 $= I + (I + S_A)^{-1}(I - R_A)(I + S_A)^{-1} = 2(I + S_A)^{-1}$
- Donc :  $R_{\tilde{A}} = (I + S_A)/2$
- (4)  $\tilde{A}R_{\tilde{A}} = AS_A(I + S_A)^{-1}(I + S_A)/2 = AS_A/2$

### Proposition 1.3

Soit  $M_A = \begin{pmatrix} S_A & A^*S_A^* \\ AS_A & -S_A^* \end{pmatrix}$  . Alors  $M_A$  est un opérateur

unitaire et symétrique de  $H \times H$  sur lui-même qui laisse invariant le graphe de  $\tilde{A}$  et envoie le graphe de  $A$  sur  $H \times \{0\}$  et réciproquement .

### **Démonstration**

On vérifie sans difficulté que  $M_A^* = M_A$  et que  $M_A M_A = I$

En outre, soit  $\{u, v\} \in H \times H$ . Alors, en utilisant (0.3) et la proposition 1.2, on trouve :

$$\begin{aligned} M_A \{u, v\} = \{u, v\} &\iff (I + M_A)/2 \{u, v\} = \{u, v\} \iff \\ &\iff P_{G(\tilde{A})} \{u, v\} = \{u, v\} \iff \{u, v\} \in G(\tilde{A}) \end{aligned}$$

Finalement si  $u \in D(A)$  on a :

$$M_A \{u, Au\} = \{S_A u + A^* S_A^* A u, 0\} \in H \times \{0\}$$

$$\text{et } M_A \{u, 0\} = \{S_A u, A S_A u\} \in G(A)$$

#### Remarque 1.4

C'est cette propriété de  $G(\tilde{A})$  qui nous a amené à appeler  $\tilde{A}$  le bissecteur de  $A$  : si  $H = \mathbb{R}$ ,  $G(\tilde{A})$  est la droite bissectrice de l'angle compris entre l'axe des abscisses et  $G(A)$ .

#### Proposition 1.5 (cf [4])

Soit  $A \in L(H)$ . Alors  $\|\tilde{A}\| < 1$ . Plus précisément :

$$\text{Si } A \text{ est borné, alors : } \|\tilde{A}\| = \frac{\|A\|}{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}}$$

Réciproquement si  $\|\tilde{A}\| < 1$ , alors  $A$  est borné

$$\text{et } \|A\| = \frac{2 \|\tilde{A}\|}{1 - \|\tilde{A}\|^2}$$

#### **Démonstration**

Soit  $A$  borné ;  $\forall u \in H$  on a :

$$\|u\|^2 = \|S_A u\|^2 + \|A S_A u\|^2 \leq (1 + \|A\|^2) \|S_A u\|^2.$$

$$\text{Donc : } \|S_A u\|^2 \geq \frac{1}{1 + \|A\|^2} \|u\|^2 \text{ et par conséquent :}$$



$$\|AS_A u\|^2 = \|u\|^2 - \|S_A u\|^2 \leq \frac{\|A\|^2}{1 + \|A\|^2} \|u\|^2$$

$$\text{D'où} \quad \|AS_A\| \leq \frac{\|A\|}{\sqrt{1 + \|A\|^2}} \quad (1.1)$$

$$\text{On a aussi} \quad \|S_A^{-1} u\| \leq \sqrt{1 + \|A\|^2} \|u\|$$

$$\text{et par conséquent} \quad \langle u, S_A^{-1} u \rangle \leq \sqrt{1 + \|A\|^2} \|u\|^2$$

L'inégalité de Schwarz généralisée (cf. [8] § 104) donne alors :

$$\forall u, v \in H \quad [\langle u, S_A v \rangle]^2 \leq \langle u, S_A u \rangle \langle v, S_A v \rangle$$

En prenant  $v = S_A^{-1} u$  on obtient :

$$\|u\|^4 \leq \langle u, S_A u \rangle \langle u, S_A^{-1} u \rangle$$

$$\text{d'où} \quad \langle u, S_A u \rangle \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \|A\|^2}} \|u\|^2$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \|(1 + S_A)u\|^2 &= \|u\|^2 + \|S_A u\|^2 + 2\langle u, S_A u \rangle \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{1 + \|A\|^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + \|A\|^2}}\right) \|u\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{et finalement} \quad \|(I + S_A)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{1 + \|A\|^2}}{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}} \quad (1.2)$$

en utilisant (1.1) et (1.2) on trouve :

$$\|\tilde{A}\| \leq \|AS_A\| \|(I + S_A)^{-1}\| \leq \frac{\|A\|}{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}} < 1 \quad (1.3)$$

Réciproquement, si  $\|B\| < 1$  on voit que :

$I - B^*B$  est inversible et par conséquent  $A = 2B(I - B^*B)^{-1}$  est borné

Il est facile de vérifier que  $\tilde{A} = B$  et comme

$$\langle (I - \tilde{A}^* \tilde{A})u, u \rangle = \|u\|^2 - \|\tilde{A}u\|^2 \geq (1 - \|\tilde{A}\|^2) \|u\|^2$$

$$\text{on voit que} \quad \|(I - \tilde{A}^* \tilde{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\tilde{A}\|^2}, \text{ ce qui donne}$$

$$\|A\| \leq \frac{2\|\tilde{A}\|}{1 - \|\tilde{A}\|^2} \quad \text{d'où : } \|A\| \|\tilde{A}\|^2 + 2\|\tilde{A}\| - \|A\| \geq 0$$

On peut exclure le cas où  $A = 0$ , la proposition étant alors évidente.

On déduit donc de l'inégalité précédente et de (1.3) que :

$$\|\tilde{A}\| \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}}{\|A\|} = \frac{\|A\|}{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}} \geq \|\tilde{A}\|$$

d'où on déduit immédiatement le reste de la démonstration

### Définition 1.6

Nous noterons  $C_0(H)$  l'ensemble des contractions  $T$  de  $L(H)$  (c'est à dire des  $T \in L(H)$  avec  $\|T\| \leq 1$ ) telles que  $N(I - T^*T) = \{0\}$ , muni de la topologie induite par celle de  $L(H)$ .

### Proposition 1.7 (cf [4])

L'application  $A \rightarrow \tilde{A}$  de  $C(H)$  dans  $C_0(H)$  est bijective, ouverte, envoie les éléments non bornés de  $C(H)$  sur les éléments de norme 1 de  $C_0(H)$  et les éléments bornés de  $C(H)$  sur les éléments de norme  $< 1$  de  $C_0(H)$ .

### **Démonstration**

Montrons d'abord la surjectivité de l'application. Soit  $B \in C_0(H)$ .

Nous avons déjà vu que si  $\|B\| < 1$  il existe un  $A \in L(H)$  tel que  $B = \tilde{A}$ .

Si  $\|B\| = 1$ , posons :

$$D(A) = R(I - B^*B) ;$$

$$\text{si } u = (I - B^*B)w \in D(A), \quad Au = 2Bw$$

Alors  $A \in C(H)$ ,  $A$  est non borné et  $\tilde{A} = B$ .

En effet,  $D(A) = R(I - B^*B)$  est dense dans  $H$ .

En outre  $A$  est fermé car si  $\{u_n\}$  est une suite d'éléments de  $D(A)$

qui converge vers  $u$  dans  $H$  et telle que  $Au_n$  converge vers  $v$  dans  $H$ ,

alors en posant  $w_n = (I - B^*B)^{-1} u_n$  et  $t_n = R_B^{-1} w_n$  on a :

$$u_n = (I - B^*B) w_n = (2R_B - I) R_B^{-1} w_n = (2R_B - I) t_n \rightarrow u$$

$$Au_n = 2Bw_n = 2BR_B t_n \rightarrow v$$

et par conséquent , en vertu de ( 0 . 5 )  $\{ t_n \}$  est une suite de Cauchy et

il existe  $t \in H$  tel que  $t_n \rightarrow t$  avec :

$$w = R_B t, u = (I - B^*B)w \in D(A) \text{ et } v = 2Bw = Au$$

Un calcul simple montre qu'alors  $\tilde{A} = B$ .

Enfin  $A$  n'est pas borné car  $D(A) \neq H$ . En effet , si  $D(A) = H$  alors

$I - B^*B$  serait inversible ce qui entrainerait que  $\|B\| < 1$  , contradiction

Finalement ( cf [ 2 ] ) :

$$g^2(A, A') \leq \|R_A - R_{A'}\|^2 + \|R_{A^*} - R_{A'^*}\|^2 + 2 \|AR_A - A'R_{A'}\|^2$$

et comme :

$$\|R_A - R_{A'}\| \leq \|S_A - S_{A'}\| \|S_A\| + \|S_{A'}\| \|S_A - S_{A'}\| \leq 2 \|S_A - S_{A'}\|$$

$$\|R_{A^*} - R_{A'^*}\| \leq \|S_{A^*} - S_{A'^*}\| \|S_{A^*}\| + \|S_{A'^*}\| \|S_{A^*} - S_{A'^*}\| \leq 2 \|S_{A^*} - S_{A'^*}\|$$

$$\begin{aligned} \|AR_A - A'R_{A'}\|^2 &\leq [\|AS_A - A'S_{A'}\| \|S_A\| + \|A'S_{A'}\| \|S_A - S_{A'}\|]^2 \leq \\ &\leq 2 [\|AS_A - A'S_{A'}\|^2 + \|S_A - S_{A'}\|^2] \end{aligned}$$

$$g^2(A, A') \leq 4 [2 \|S_A - S_{A'}\|^2 + 2 \|S_{A^*} - S_{A'^*}\|^2 + \|AS_A - A'S_{A'}\|^2]$$

$$\text{En outre } \|S_A - S_{A'}\| \leq 2 g(\tilde{A}, \tilde{A}') ; \|S_{A^*} - S_{A'^*}\| \leq 2 g(\tilde{A}, \tilde{A}')$$

$$\text{et } \|AS_A - A'S_{A'}\| \leq 2 g(\tilde{A}, \tilde{A}')$$

$$\text{Donc } g^2(A, A') \leq \overset{64}{80} g^2(\tilde{A}, \tilde{A}')$$

$$\text{d'où } g(A, A') < \overset{8}{9} g(\tilde{A}, \tilde{A}') \quad (1.4)$$

Comme sur  $C_0(H)$  la topologie uniforme est équivalente à celle induite par  $g$  ( cf [ 2 ] ) la proposition est démontrée .

## § 2 . Compalence

### Définition 2.1

Soit  $A, B \in C(H)$  . Nous dirons que  $A$  et  $B$  sont compalents s'il existe un opérateur unitaire  $U$  tel que  $A \approx_K UBU^*$

### Remarque 2.2

La définition 2.1 coïncide avec la définition habituelle ( cf [ 1 ] ) si  $A$  et  $B$  sont bornés .

### Proposition 2.3

$$A \approx_K UBU^* \iff U^*AU \approx_K B$$

La compalence est une relation d'équivalence sur  $C(H)$  .

#### **Démonstration**

Posons  $C = UBU^*$  . On vérifie facilement que :

$$R_C = UR_BU^* ; R_{C^*} = UR_B^*U^* ; CR_C = UBR_BU^* ; C^*R_{C^*} = UB^*R_B^*U^*$$

Donc en posant :  $V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$  on voit immédiatement que

$$P_{G(C)} = V P_{G(B)} V^* ; I + A^*C = U(I + U^*A^*UB)U^* . \text{ Donc :}$$

$$\begin{aligned} P_{G(U^*AU)} - P_{G(B)} &= V^*(P_{G(A)} - VP_{G(B)}V^*)V = V^*(P_{G(A)} - P_{G(C)})V = \\ &= \text{compact et } \text{Ind}(I + U^*A^*UB) = \text{Ind}(I + A^*C) = 0 . \end{aligned}$$

La transitivité de la relation s'établit de la même manière .

### Proposition 2.4

Soit  $A, B \in C(H)$  tels que  $A$  et  $B$  soient compalents . Alors :

$$1) \rho_e(A) = \rho_e(B)$$

$$2) \forall \lambda \in \rho_e(A) , \text{Ind}(A - \lambda I) = \text{Ind}(B - \lambda I)$$

**Démonstration**

En utilisant le théorème 3.1 de [ 6 ] on trouve :

$$\rho_e(A) = \rho_e(UBU^*) = \rho_e(B)$$

$$\forall \lambda \in \rho_e(A), \text{Ind}(A - \lambda I) = \text{Ind}(UBU^* - \lambda I) = \text{Ind}(U(B - \lambda I)U^*) = \text{Ind}(B - \lambda I)$$

**Proposition 2.5**

Soit  $A, B \in C(H)$ . Alors

$\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont compalents  $\Rightarrow A$  et  $B$  sont compalents.

**Démonstration**

Sous les hypothèses de la proposition il existe un opérateur unitaire  $U$

tel que  $\tilde{A} = UBU^* + K$ . Posons  $\tilde{C} = UBU^*$ . Alors :

$$\tilde{A} = \tilde{C} + K \Rightarrow P_{G(\tilde{A})} - P_{G(\tilde{C})} \text{ est compact}$$

$$\Rightarrow S_A - S_C, S_{A^*} - S_{C^*}, AS_A - CS_C \text{ sont compacts}$$

$$\Rightarrow R_A - R_C, R_{A^*} - R_{C^*}, AR_A - CR_C \text{ sont compacts}$$

$$\Rightarrow P_{G(A)} - P_{G(C)} \text{ est compact} \Rightarrow A \sim_K C$$

En outre si  $V_{AC} = S_A S_C + A^* S_{A^*} C S_C$  on a :

$$V_{AC} = (S_A - S_C)S_C + (A^* S_{A^*} - C^* S_{C^*})C S_C + R_C + C^* C R_C =$$

$$= I + \text{compact}. \text{ Donc } V_{AC} \in F(H) \text{ et } \text{Ind}(V_{AC}) = 0$$

Or on voit facilement que  $I + A^* C = S_A^{-1} V_{AC} S_C^{-1}$  et comme  $S_A^{-1}$

et  $S_C^{-1}$  sont Fredholm d'indices nuls

$$\text{Ind}(I + A^* C) = \text{Ind}(S_A^{-1}) + \text{Ind}(V_{AC}) + \text{Ind}(S_C^{-1}) = 0$$

(cf. [ 2 ], Théorème 2.1). Donc  $A \approx_K C$

**Proposition 2.6**

Soit  $A, B \in L(H)$ , tels que  $A \sim_K B$  et  $R(A), R(B)$  fermés.

Alors  $P_{N(A)} - P_{N(B)}$  est compact

### Démonstration

Soit  $\{u_n\}$  une suite d'éléments de  $H$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| = 1$ .

Alors (cf [ 6 ], Proposition 2.6) :

$$\|(I - P_{G(A)})\{(I - P_{N(A)})P_{N(B)}u_n, 0\}\| \geq \frac{c(A)}{\sqrt{1 + c^2(A)}} \|(I - P_{N(A)})P_{N(B)}u_n\|$$

$$\begin{aligned} \text{Or } (I - P_{G(A)})\{(I - P_{N(A)})P_{N(B)}u_n, 0\} &= (I - P_{G(A)})\{P_{N(B)}u_n, 0\} = \\ &= (I - P_{G(A)})P_{G(B)}\{P_{N(B)}u_n, 0\} \end{aligned}$$

Donc :

$$\|(I - P_{N(A)})P_{N(B)}u_n\| \leq \frac{\sqrt{1 + c^2(A)}}{c(A)} \|(I - P_{G(A)})P_{G(B)}\{P_{N(B)}u_n, 0\}\|$$

et comme  $A \sim_K B \Rightarrow (I - P_{G(A)})P_{G(B)} = (P_{G(A)} - P_{G(B)})P_{G(B)}$  est compact, il existe une sous suite de  $\{u_n\}$  (notée encore  $\{u_n\}$  sans perte de généralité) telle que  $\{(I - P_{N(A)})P_{N(B)}u_n\}$  soit convergente.

Donc  $(I - P_{N(A)})P_{N(B)}$  est compact et par symétrie entre  $A$  et  $B$

$(I - P_{N(B)})P_{N(A)}$  est également compact.

Donc  $P_{N(A)} - P_{N(B)} = (I - P_{N(B)})P_{N(A)} - [(I - P_{N(A)})P_{N(B)}]^*$  est compact.

### § 3 . Opérateurs essentiellement normaux

#### Définition 3.1

Soit  $A \in C(H)$ . Nous dirons que  $A$  est essentiellement normal si

$$A^*A \approx_K AA^*$$

#### Remarque 3.2

Si  $A \in L(H)$  cette définition est équivalente à la définition habituelle pour les opérateurs bornés :  $A$  est essentiellement normal si  $A^*A - AA^*$  est un opérateur compact. ( cf [ 1 ], [ 6 ] proposition 2.5 )

**Proposition 3.3** ( cf [ 7 ] )

Soit  $A \in C(H)$  . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $A$  est essentiellement normal
- 2)  $R_A - R_{A^*}$  est compact
- 3)  $\tilde{A}$  est essentiellement normal
- 4) Il existe une suite  $\{A_n\} \subset L(H)$  telle que
  - a)  $\forall n \in \mathbb{N}, A_n$  est essentiellement normal
  - b)  $g(A, A_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$

**Démonstration**

$$1) \iff 2) .$$

D'après la remarque 2.3 de [ 6 ] :

$$1) \iff AA^*S_{AA^*}S_{A^*A} - S_{AA^*}A^*AS_{A^*A} \text{ est compact . } (3.1)$$

$$\text{Or } \forall u \in D((A^*A)^2) \quad [I + (A^*A)^2]u = (I + A^*A)^2u - 2(I + A^*A)u + 2u$$

En posant  $u = R_{A^*}Av$  , on trouve :

$$v = (I + A^*A)^2R_{A^*}Av - 2(I + A^*A)R_{A^*}Av + 2R_{A^*}Av$$

$$\text{d'où } R_{A^*}^2v = [I - 2R_A(I - R_A)]R_{A^*}Av$$

Or  $R_A(I - R_A) = A^*R_{A^*}AR_A$  et par conséquent

$$\|R_A(I - R_A)\| = \|AR_A\|^2 \leq 1/4 , \text{ en utilisant } (0.2)$$

Donc  $I - 2R_A(I - R_A) \geq I/2$  est inversible et on peut écrire :

$$R_{A^*}A = R_A^2[I - R_A(I - 2R_A)]^{-1}$$

$$\text{d'où } S_{A^*A} = R_A[I - 2R_A(I - R_A)]^{-1/2}$$

$$\text{et de même } S_{AA^*} = R_{A^*}[I - 2R_{A^*}(I - R_{A^*})]^{-1/2}$$

En remplaçant ces valeurs dans (3.1) on trouve :

$$[I - 2R_{A^*}(I - R_{A^*})]^{-1/2}(R_A - R_{A^*})[I - 2R_A(I - R_A)]^{-1/2} \text{ est compact}$$

et par conséquent  $R_A - R_{A^*}$  est compact

$$2) \Rightarrow 3) .$$

En utilisant la proposition 0.5 on voit que

2)  $\Rightarrow S_A - S_{A^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} [p_n(R_A) - p_n(R_{A^*})]$  est compact, ce qui

est équivalent à dire que  $R_{\tilde{A}} - R_{\tilde{A}^*}$  est compact. Comme

$R_{\tilde{A}} - R_{\tilde{A}^*} = R_{\tilde{A}} (\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A}) R_{\tilde{A}^*}$  et  $\tilde{A}$  est borné et par conséquent

$R_{\tilde{A}}$  et  $R_{\tilde{A}^*}$  sont inversibles on en déduit que  $\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A}$  est compact.

3)  $\Rightarrow$  4)

Si  $A$  est borné 4) est trivialement vrai. Supposons donc  $A$  non borné.

Posons :  $\tilde{A}_n = (1 - 1/n) \tilde{A}$ . Alors  $\tilde{A}_n$  est essentiellement normal et

comme  $\|\tilde{A}_n\| \leq 1 - 1/n < 1$ ,

$$A_n = 2(1 - 1/n) \tilde{A} [I - (1 - 1/n)^2 \tilde{A}^* \tilde{A}]^{-1} \in L(H)$$

et  $A_n$  est essentiellement normal car  $A_n^* A_n - A_n A_n^*$  est compact

(simple vérification). En outre :  $\tilde{A}_n \rightarrow \tilde{A}$  dans  $L(H)$  quand  $n \rightarrow \infty$

Donc d'après (1.3) :  $g(A_n, A) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$

4)  $\Rightarrow$  2)

Soit  $\{A_n\} \subset L(H)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  soit essentiellement

normal et  $g(A, A_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors

$$\|R_{A_n} - R_A\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

$$\text{et } \|R_{A_n^*} - R_{A^*}\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Donc  $R_{A^*} - R_A$  est limite uniforme des opérateurs compacts

$R_{A_n^*} - R_{A_n}$  et par conséquent est compact

### Corollaire 3.4

Soit  $A \in C(H)$ ,  $A$  essentiellement normal. Alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ est essentiellement normal}$$

### **Démonstration**

En vertu de 4) il existe  $\{A_n\} \subset L(H)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  soit



essentiellement normal et  $g(A, A_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors  
 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\{A_n - \lambda I\}$  est une suite d'opérateurs bornés, essentiellement  
normaux avec  $g(A - \lambda I, A_n - \lambda I) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  (cf [6]  
proposition 2.6). Donc  $A - \lambda I$  est essentiellement normal

### **Proposition 3.5**

Soit  $A \in C(H)$ ,  $A$  essentiellement normal et  $R(A)$  fermé. Alors :  
 $A$  est quasi-Fredholm

#### **Démonstration**

$R(A)$  fermé  $\Rightarrow R(A^*)$  fermé  $\Rightarrow R(A^*A)$  et  $R(AA^*)$  sont fermés

D'après la proposition 2.6 on en déduit que

$P_{N(A^*)} - P_{N(A)} = P_{N(AA^*)} - P_{N(A^*A)}$  est compact

Donc  $I - P_{N(A^*)} + P_{N(A)} \in F(H)$  et par conséquent  $R[I - P_{N(A^*)} + P_{N(A)}] =$   
 $= R[P_{R(A)} + P_{N(A)}]$  est fermé et de codimension finie. Comme

$R(A) + N(A) \supset R[P_{R(A)} + P_{N(A)}]$  on en déduit que  $R(A) + N(A)$  est fermé  
et de codimension finie. Symétriquement  $R(A^*) + N(A^*)$  est fermé et de  
codimension finie, d'où  $R(A) \cap N(A)$  est de dimension finie. La suite  
 $\{R(A^j) \cap N(A)\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  est une suite décroissante de sous espaces  
de dimensions finies : il existe donc un  $d \in \mathbb{N}$  tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq d \Rightarrow R(A^n) \cap N(A) \supset R(A^d) \cap N(A)$ .

$R(A^d) \cap N(A)$  est fermé (car de dimension finie)

$R(A) + N(A^d)$  est fermé (car de codimension finie)

Donc  $A$  est quasi Fredholm. (cf. [5], Définition. 3.1.2)

### **Corollaire 3.6**

Soit  $A \in C(H)$  essentiellement normal. Alors

$$1) \quad \text{Reg}(A) \subset \rho_e(A)$$

2) Si  $A$  est semi Fredholm , il est Fredholm

### Démonstration

1) Si  $\lambda \in \text{Reg}(A)$  ,  $R(A - \lambda I)$  est fermé et comme  $A - \lambda I$  est régulier

$$\dim N(A - \lambda I) = \dim [ N(A - \lambda I) \cap R(A - \lambda I) ] < \infty$$

$$\dim N(A^* - \bar{\lambda} I) = \dim [ N(A^* - \bar{\lambda} I) \cap R(A^* - \bar{\lambda} I) ] < \infty$$

et par conséquent  $\lambda \in \rho_e(A)$

2) Si  $A \in \text{SF}(H)$  , il existe un voisinage  $U$  de  $0$  tel que  $\forall \lambda \in U$  ,

$$\text{Ind}(A - \lambda I) = \text{Ind}(A) .$$

Or si  $\lambda \in U \setminus \{0\}$  ,  $\dim N(A - \lambda I) \leq \dim [ N(A) \cap R(A) ] < \infty$

$$\text{et } \dim N(A^* - \bar{\lambda} I) \leq \dim [ N(A^*) \cap R(A) ] < \infty$$

Donc  $\text{Ind}(A) = \text{Ind}(A - \lambda I) < \infty$  et par conséquent  $A \in F(H)$

### Proposition 3.7

Soit  $A \in C(H)$  essentiellement normal . Alors  $g(A^*A, AA^*) < 1$

### Démonstration

Par hypothèse  $P_{G(A^*A)} - P_{G(AA^*)}$  est compact et autoadjoint et

$g(A^*A, AA^*) \leq 1$  . Pour que  $g(A^*A, AA^*) = 1$  il faudrait que

$P_{G(A^*A)} - P_{G(AA^*)}$  admette  $\pm 1$  comme valeur propre .

Supposons par exemple que  $\{u, v\} \in H \times H$  ,  $\|\{u, v\}\| = 1$  soit tel que

$P_{G(A^*A)}\{u, v\} - P_{G(AA^*)}\{u, v\} = \{u, v\}$  . Alors :

$$\|[I + P_{G(AA^*)}]\{u, v\}\|^2 = \|\{u, v\}\|^2 + (3 P_{G(AA^*)}\{u, v\}, \{u, v\}) \leq$$

$$\leq \|P_{G(A^*A)}\{u, v\}\|^2 \leq \|\{u, v\}\|^2$$

Donc  $P_{G(AA^*)}\{u, v\} = \{0, 0\}$  et  $P_{G(A^*A)}\{u, v\} = \{u, v\}$

où encore  $R_{AA^*}u + AA^*R_{AA^*}v = 0$  ;  $AA^*R_{AA^*}u + v - R_{AA^*}v = 0$

$$R_{A^*A}u + A^*AR_{A^*A}v = u \quad ; \quad A^*AR_{A^*A}u + v - R_{A^*A}v = v$$

d'où :  $v \in D(AA^*)$  ,  $u = -AA^*v$  ,  $u \in D(A^*A)$  et  $v = A^*Au$

Donc  $u = -AA^*A^*Au$

et par conséquent  $\|Au\|^2 = -(Au, AAA^*Au) = -\|A^*A^*Au\|^2$

Donc  $\|Au\| = 0$ , d'où  $Au = 0$  et  $u = 0$  et  $v = 0$ , contradiction.

Si  $P_{G(A^*A)}\{u, v\} - P_{G(AA^*)}\{u, v\} = -\{u, v\}$  on procède de la même façon, en utilisant la symétrie entre  $A$  et  $A^*$ .

#### § 4. Théorème de Brown-Douglas-Fillmore

##### Proposition 4.1

Soit  $A$  une contraction essentiellement normale et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\lambda| < 1$  et  $R(A - \lambda I)$  soit fermé. Alors si  $F(\lambda) = (A - \lambda I) + \lambda(A^* - \bar{\lambda}I)A$  il existe un opérateur borné inversible  $C$  et un opérateur compact  $K$

tels que  $F(\lambda) = (A - \lambda I)C + K$

##### **Démonstration**

Soit  $B(\lambda)$  l'inverse de Moore-Penrose de  $A - \lambda I$ .

Comme  $R(A - \lambda I)$  est fermé,  $B(\lambda)$  est borné et à image fermée. En outre

$$B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda}I) = (A - \lambda I)B(\lambda) = P_{R(A - \lambda I)}. \text{ Or :}$$

$$\begin{aligned} A^* - \bar{\lambda}I &= (A^* - \bar{\lambda}I)B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda}I) = (A^* - \bar{\lambda}I)B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)B(\lambda) = \\ &= (A^* - \bar{\lambda}I)B^*(\lambda)(A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda) + \text{compact} = \\ &= [(A^* - \bar{\lambda}I)B^*(\lambda) - (A - \lambda I)B(\lambda)](A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda) + (A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda) + \\ &+ \text{compact}. \end{aligned}$$

$$\text{Or } [(A^* - \bar{\lambda}I)B^*(\lambda) - (A - \lambda I)B(\lambda)] = P_{R(A^* - \bar{\lambda}I)} - P_{R(A - \lambda I)} =$$

$$= P_{N(A^* - \lambda I)} - P_{N(A^* - \bar{\lambda}I)} = \text{compact, d'après la proposition 2.6}$$

$$\text{Donc } F(\lambda) = (A - \lambda I) + \lambda(A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda)A + \text{compact}$$

Où encore  $F(\lambda) = (A - \lambda I)[I + \lambda(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda)A] + \text{compact}$  (4.1)

Posons  $U(\lambda) = (A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda)$ .

Alors  $U^*(\lambda)U(\lambda) = B^*(\lambda)(A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda) =$   
 $= B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)B(\lambda) + \text{compact} = P_{R(A - \lambda I)} + \text{compact}$

Donc  $\sqrt{U^*(\lambda)U(\lambda)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(P_{R(A - \lambda I)} + \text{compact}) =$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} [p_n(P_{R(A - \lambda I)}) + \text{compact}] = P_{R(A - \lambda I)} + \text{compact}$

En utilisant la décomposition polaire de  $U(\lambda)$  on obtient :

$U(\lambda) = T\sqrt{U^*(\lambda)U(\lambda)}$  où  $T$  est une isométrie partielle

Donc  $U(\lambda) = TP_{R(A - \lambda I)} + K(\lambda)$  où  $K(\lambda)$  est compact

et par conséquent  $\|U(\lambda) - K(\lambda)\| \leq 1$ .

Finalement  $F(\lambda) = (A - \lambda I)\{I + \lambda U(\lambda)A\} + \text{compact} =$   
 $= F(\lambda) = (A - \lambda I)\{I + \lambda[U(\lambda) - K(\lambda)]A\} + \text{compact}$

et comme  $|\lambda| < 1$ ,  $\|\lambda[U(\lambda) - K(\lambda)]A\| < 1$  et par conséquent en prenant  $C = I + \lambda[U(\lambda) - K(\lambda)]A$  la proposition est démontrée.

### **Proposition 4.2**

Soit  $A$  une contraction essentiellement normale et si  $\lambda \in \mathbb{C}$  posons encore  $F(\lambda) = (A - \lambda I) + \lambda(A^* - \bar{\lambda}I)A$ . Alors si  $F(\lambda)$  est un opérateur de Fredholm  $A - \lambda I$  est aussi un opérateur de Fredholm et

$$\text{Ind}(F(\lambda)) = \text{Ind}(A - \lambda I)$$

### **Démonstration**

Puisque  $F(\lambda)$  est Fredholm,  $\dim N(F(\lambda)) < \infty$  et  $c(F(\lambda)) > 0$ .

Posons  $K_0 = A^*A - AA^*$ .  $K_0$  est compact et symétrique et par conséquent  $H$  se décompose en une somme directe orthogonale au plus dénombrable de sous espaces  $M_j$ , invariants par rapport à  $K_0$ , avec

$\dim M_j < \infty$  et tels que  $K_0|_{M_j} = \lambda_j I_j$  ( $I_j$  désignant la restriction de l'identité à  $M_j$ ) avec  $\lambda_0 = 0$ , la suite de nombres réels  $\{|\lambda_j|\}$  étant décroissante à partir de  $j = 1$ , avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_j| = 0$

Alors  $\exists M = \sum_{j=1}^n M_j$  (donc  $\dim M < \infty$ ) tel que :

$$\|K_0|_{M^\perp}\| \leq \min\{c^2(F(\lambda))/5, c(F(\lambda))/5\}. \text{ Posons } N = M + N(F(\lambda)).$$

Alors  $\dim N < \infty$ .

Supposons que  $R(A - \lambda I)$  ne soit pas fermé :

alors  $R(A - \lambda I)|_{N^\perp}$  n'est pas fermé et par conséquent il existe  $u \in N^\perp$ ,  $\|u\| = 1$  avec  $\|(A - \lambda I)u\| \leq c(F(\lambda))/5$ .

$$\text{Or } F(\lambda)u = (A - \lambda I)u + \lambda(A^*A - AA^*)u + \lambda A(A^* - \bar{\lambda}I)u$$

$$\text{et } \|(A^* - \bar{\lambda}I)u\|^2 = (K_0 u, u) + \|(A - \lambda I)u\|^2. \text{ Donc :}$$

$$\|(A^* - \bar{\lambda}I)u\|^2 \leq c^2(F(\lambda)) \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \right) \leq \left( \frac{3}{5} c(F(\lambda)) \right)^2$$

et par conséquent :

$$\|F(\lambda)u\| \leq c(F(\lambda))/5 + |\lambda| c(F(\lambda))/5 + |\lambda| \|A\| 3c(F(\lambda))/5 < c(F(\lambda)),$$

contradiction.

Donc  $R(A - \lambda I)$  est fermé.

Mais alors, en vertu de la proposition 4.1,  $\exists C$  inversible et  $K$  compact tels que  $F(\lambda) = (A - \lambda I)C + K$ .

Donc  $(A - \lambda I)$  est Fredholm et  $\text{Ind}(A - \lambda I) = \text{Ind}(F(\lambda))$

### Théorème 4.3

Soit  $A \in C(H)$  essentiellement normal. Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  avec  $|\lambda| < 1$ ,

$$\text{posons : } \Phi(\lambda) = \frac{2\lambda}{1 - |\lambda|^2}$$

$$\text{Alors } \Phi(\lambda) \in \rho_e(A) \iff \lambda \in \rho_e(\tilde{A})$$

$$\text{et } \text{Ind}(A - \Phi(\lambda)I) = \text{Ind}(\tilde{A} - \lambda I)$$

### Démonstration

$$A - \Phi(\lambda) = 2A(I - \tilde{A}^* \tilde{A})^{-1} - 2\lambda(1 - |\lambda|^2)^{-1} = 2(1 - |\lambda|^2)^{-1} F(\lambda) (I - \tilde{A}^* \tilde{A})^{-1}$$

Comme  $(I - \tilde{A}^* \tilde{A})^{-1}$  est surjectif, il est Fredholm et par conséquent

$A - \Phi(\lambda)$  est Fredholm si et seulement si  $F(\lambda)$  l'est aussi et ils ont le même indice. Le reste de la démonstration se déduit immédiatement des deux propositions précédentes

### Théorème 4.4

Soit  $A, B \in C(H)$ , essentiellement normaux. Alors  $A$  et  $B$  sont compalents si et seulement si ils ont le même tableau spectral, c'est à

dire si  $\rho_e(A) = \rho_e(B)$

et si  $\forall \lambda \in \rho_e(A), \quad \text{Ind}(A - \lambda I) = \text{Ind}(B - \lambda I)$

### Démonstration

"seulement si" :

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.4

"si" :

Le théorème précédent montre qu'alors on a :

$$\rho_e(\tilde{A}) = \rho_e(\tilde{B})$$

et  $\forall \lambda \in \rho_e(\tilde{A}), \quad \text{Ind}(\tilde{A} - \lambda I) = \text{Ind}(\tilde{B} - \lambda I)$

Donc, d'après le théorème de Brown-Douglas-Fillmore  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont compalents et par conséquent en utilisant la proposition 2.5,  $A$  et  $B$  sont compalents.

### ENGLISH SUMMARY

In 1976, L. Brown, R.G. Douglas and P.A. Fillmore have given a characterization of compalence classes of essentially normal bounded operators on a Hilbert space by means of their spectral pictures. The present work is devoted to the extension of that now classical result to the case of unbounded operators also on a Hilbert space.

## Bibliographie

- [ 1 ] L. BROWN , R.G. DOUGLAS , P.A. FILLMORE *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of  $C^*$ -algebras* Rochester Conf. on Op. Theory , Lectures Notes in Math , 345 , Springer Verlag , New York (1973) 58-127
- [ 2 ] H.O. CORDES , J.Ph. LABROUSSE *The invariance of the index in the metric space of closed operators* J. Math and Mech. 12 (5) (1963) 693-720
- [ 3 ] C.W. GROETSCH *Generalized inverses of linear operators* :ercel Dekker, Nez York (1977)
- [ 4 ] J.Ph. LABROUSSE *Quelques topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert et leurs applications* Univ. de Nice , Dpt. de Math. , Nice (1970)
- [ 5 ] J.Ph. LABROUSSE *Les opérateurs quasi Fredholm : une généralisation des opérateurs semi Fredholm* Rend. Circ. Mat. Palermo ,T. XXIX , (1980) 161-258
- [ 6 ] J.Ph. LABROUSSE , B. MERCIER *Equivalences compactes entre deux opérateurs sur un espace de Hilbert* Math. Nachr. 133 (1987) 91-105
- [ 7 ] B. MERCIER *Généralisation d'un théorème de Brown-Douglas-Fillmore aux opérateurs fermés à domaine dense* Univ. de Nice , Dpt. de Math. , Nice (1984)
- [ 8 ] F. RIESZ , B. Sz. NAGY *Leçons d'analyse fonctionnelle* Akad. Kiado , Budapest , (1952)
- [ 9 ] M.H. STONE *On unbounded operators on a Hilbert space* J. Indian Math. Soc. 15 (1951) 155-192

Département de Mathématiques  
 Université de Nice  
 Parc Valrose  
 F-06034 Nice Cedex  
 FRANCE